Prüfung zur Systemtheorie und Regelungstechnik I, Universität Freiburg, SoSe 2021 (Prof. Dr. M. Diehl)

Mikroklausur 1 am 11.5.2021

Übungsgruppe: 1 ☐ Tutor*in 1	2 ☐ Tutor*in 2	3 ☐ Tutor*in 3
Name:	Matrikelnummer:	Punkte: / 9

Füllen Sie bitte Ihre Daten ein und machen Sie jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Sie dürfen Extrapapier für Zwischenrechnungen nutzen, aber bitte geben Sie am Ende nur dieses Blatt ab. Richtige Antworten zählen 1 Punkt, falsche -1/3 Punkt, keine oder mehrere Kreuze 0 Punkte.

1. Wie lautet der Imaginärteil von $e^{(aj+b)jt}$?

(a) ☐ $e^{at} \cdot \sin(bt)$	(b) ☐ $e^{-at} \cdot \sin(bt)$	(c) ☐ $e^{-bt} \cdot \sin(at)$	(d) ☐ e^{jbt}

$$\Im(e^{(aj+b)jt}) = \Im(e^{(-a+bj)t}) = \Im(e^{-at} \cdot e^{jbt}) = \Im(e^{-at} \cdot (\cos(bt) + j\sin(bt))) = e^{-at} \cdot \sin(bt)$$

2. Multiplizieren Sie $z_1 = 4 + 7j$ mit $z_2 = 5 - j$. Das Ergebnis ist gegeben durch:

(a) ☒ $27 + 31j$	(b) ☐ $13 + 31j$
(c) ☐ $31 + 13j$	(d) ☐ $27 + 39j$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 7j) \cdot (5 - j) = 20 - 4j + 35j - 7j^2 = 27 + 31j$$

3. Dividieren Sie $a = 7e^{6\pi j}$ durch $b = \frac{4}{7}e^{-\pi j}$. Das Ergebnis ist gegeben durch:

(a) ☐ $\frac{49}{4}e^{5\pi j}$	(b) ☐ $\frac{49}{4}e^{7\pi j}$	(c) ☐ $4e^{7\pi j}$	(d) ☐ $4e^{5\pi j}$

$$\frac{a}{b} = \frac{7e^{6\pi j}}{\frac{4}{7}e^{-\pi j}} = 7\frac{7}{4}e^{6\pi j}e^{\pi j} = \frac{49}{4}e^{7\pi j}$$

4. Bestimmen Sie das Produkt $A^T \cdot x$ von $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ und $x = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) ☐ $\begin{bmatrix} 4 \\ -28 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $\begin{bmatrix} 20 \\ -28 \end{bmatrix}$	(c) ☐ $\begin{bmatrix} 20 \\ -20 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $\begin{bmatrix} 4 \\ -20 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + 12 \\ 4 - 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -20 \end{bmatrix}$$

5. Multiplizieren Sie die beiden Matrizen A_1 und A_2 mit $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ und $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(a) ☐ $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$	(c) ☐ $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Ein hängendes Pendel, auf das eine äußere Kraft wirkt, wird durch die linearisierte DGL $I\ddot{\theta} = -mgL\theta - c\dot{\theta}L + FL$ beschrieben. Nehmen Sie $x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$ als Zustand und $u = F$ als Eingang. Bringen Sie das System in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$. Geben Sie A und B an.

(a) ☐ $A = \begin{bmatrix} \frac{mgL}{I} & \frac{cL}{I} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -mgL & -cL \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}$
(c) ☒ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL}{I} & -\frac{cL}{I} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L}{I} \end{bmatrix}$	(d) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgL}{I} & \frac{cL}{I} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L}{I} \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{mgL}{I} \cdot x_1 - \frac{cL}{I} \cdot x_2 + \frac{L}{I} \cdot u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL}{I} & -\frac{cL}{I} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L}{I} \end{bmatrix} u$$

7. Ein Auto fährt eine hügelige Strecke entlang. Der Zustand des Systems ist gegeben durch die Position des Fahrzeugs in der Landschaft p und dessen Geschwindigkeit v. Der Eingang des Systems ist die Antriebskraft F. Es gilt $\dot{v} = 0.5\sin(4p) + 0.5F$. Linearisieren Sie das System um $p_{\text{ss}} = \pi$, $v_{\text{ss}} = 1$ und $F_{\text{ss}} = 0$ Bringen Sie das System in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$. Geben Sie A und B an.

(a) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$	(b) ☐ $A = \begin{bmatrix} \pi & \pi \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
(c) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$	(d) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} v \\ 0.5\sin(4p) + 0.5F \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 \cdot 4 \cdot \cos(4p_{\text{ss}}) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

8. Bei einem Testflug auf dem Mars soll der Helikopter namens Ingenuity von der Nasa Expedition auf eine Höhe von 3 Meter aufsteigen und dort auf der Stelle schweben. Der Helikopter mit der Masse m hat als Eingänge seinen Kippwinkel u_1 (gemessen zur vertikalen, d.h. während des Flugs gilt $|u_1| < 90°$) und die Geschwindigkeit seines Rotors u_2. Abhängig vom Kippwinkel und der Rotorgeschwindigkeit ist die Bewegungsgleichung für die vertikale z-Achse gegeben durch: $m \cdot \dot{v}_z = \cos(u_1) \cdot k_p \cdot u_2^2 - m \cdot g_m$ (dabei gibt g_m die Fallbeschleunigung auf dem Mars an) und für die horizontale x-Achse gegeben durch: $m \cdot \dot{v}_x = \sin(u_1) \cdot k_p \cdot u_2^2$

Welcher Kippwinkel u_1^{ss} und welche Rotorgeschwindigkeit u_2^{ss} müssen eingestellt werden, damit der Helikopter auf der Stelle schweben bleibt?

(a) ☒ $u_1^{\text{ss}} = 0$, $u_2^{\text{ss}} = \sqrt{\frac{m \cdot g_m}{k_p}}$	(b) ☐ $u_1^{\text{ss}} = 0$, $u_2^{\text{ss}} = \frac{m \cdot g_m}{k_p}$	(c) ☐ $u_1^{\text{ss}} = 45°$, $u_2^{\text{ss}} = 0$	(d) ☐ $u_1^{\text{ss}} = -45°$, $u_2^{\text{ss}} = \sqrt{\frac{m \cdot g_m}{k_p}}$

$$m \cdot \dot{v}_x = \sin(u_1^{\text{ss}}) \cdot k_p \cdot (u_2^{\text{ss}})^2 = 0 \Rightarrow \sin(u_1^{\text{ss}}) = 0 \Rightarrow u_1^{\text{ss}} = 0$$
$$m \cdot \dot{v}_z = \cos(0) \cdot k_p \cdot (u_2^{\text{ss}})^2 - m \cdot g_m = 0 \Leftrightarrow u_2^{\text{ss}} = \sqrt{\frac{m \cdot g_m}{k_p}}$$

9. Welche Lösung $x(t)$ hat die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = 3x(t) - u(t)$ mit dem Anfangswert $x(0) = 4$?

(a) ☐ $2e^t$	(b) ☐ $-u(t) + \int_0^t 3x(\tau)d\tau$
(c) ☐ $4e^{3t} - e^{3t}\int_0^t e^{-\tau}u(\tau)d\tau$	(d) ☒ $4e^{3t} - e^{3t}\int_0^t e^{-3\tau}u(\tau)d\tau$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \text{ mit } A = 3, B = -1, x_0 = 4$$
$$\Rightarrow x(t) = 4e^{3t} + \int_0^t e^{3(t-\tau)} \cdot (-1) \cdot u(\tau)d\tau = 4e^{3t} + \int_0^t e^{3t}e^{-3\tau} \cdot (-u(\tau))d\tau = 4e^{3t} - e^{3t}\int_0^t e^{-3\tau}u(\tau)d\tau$$