

Klausur Optimierung – Teil 2

Abschnitt Nichtlineare Programmierung (Prof. Diehl)

31.8.2021

Hinweis: In diesem Teil der Klausur ist bei Multiple-Choice-Fragen immer genau eine Antwortmöglichkeit richtig. Wird eine falsche, eine nichteindeutige, oder keine Antwort gegeben, gibt es 0 Punkte. Für die richtige Antwort gibt es die angegebene volle Punktzahl.

1. Betrachten Sie das folgende nichtlineare Programm (NLP). Wann ist dieses NLP auf jeden Fall konvex?

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} g(x) = 0, \\ h(x) \geq 0. \end{cases}$$

(a) <input type="checkbox"/> $f(x)$ ist konvex, $g(x)$ und $h(x)$ sind egal.	(b) <input type="checkbox"/> $f(x)$ ist konvex, $g(x)$ und $h(x)$ sind konkav.
(c) <input type="checkbox"/> $f(x)$ ist konvex, $g(x)$ konkav und $h(x)$ affin.	(d) <input type="checkbox"/> $f(x)$ ist konvex, $g(x)$ affin und $h(x)$ konkav.
2	

2. Betrachten Sie das folgende nichtlineare Programm (NLP). Wann ist dieses NLP ein quadratisches Programm (QP)? Hierbei ist $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $g \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}$.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.t.} \quad c(x) = 0$$

(a) <input type="checkbox"/> $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx$, $c(x) = x^\top Cx$	(b) <input type="checkbox"/> $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + g^\top x$, $c(x) = Ax + b$
(c) <input type="checkbox"/> $f(x) = g^\top x$, $c(x) = x^\top Cx$	(d) <input type="checkbox"/> $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx + g^\top x$, $c(x) = x^\top Cx + d$
2	

3. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem, mit $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $g \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Die Lagrangian ist definiert als $\mathcal{L}(x, \lambda) = x^\top Qx + g^\top x - \lambda^\top (Ax + b)$, mit $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Welches ist die zugehörige KKT-Matrix?

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} x^\top Qx + g^\top x \quad \text{s.t.} \quad Ax + b = 0$$

(a) <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} Q & g \\ A^\top & b \end{bmatrix}$	(b) <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} Q & -A^\top \\ A & 0 \end{bmatrix}$	(c) <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} A^\top A & Q \\ Q & 0 \end{bmatrix}$	(d) <input type="checkbox"/> $\begin{bmatrix} xx^\top & A^\top A \\ A^\top A & Q \end{bmatrix}$
2			

4. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{s.t.} \quad \begin{cases} c(x) = 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Welches ist das zugehörige Barriereproblem, welches im Kontext des Innere-Punkte-Verfahrens (IP) relevant ist? Hierbei ist $\mu > 0$ der Barriereparameter.

(a) <input type="checkbox"/> $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i) \quad \text{s.t.} \quad c(x) = 0$	(b) <input type="checkbox"/> $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i) \quad \text{s.t.} \quad c(x) = 0$
(c) <input type="checkbox"/> $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) - \sum_{i=1}^n \log(\mu x_i) \quad \text{s.t.} \quad c(x) = 0$	(d) <input type="checkbox"/> $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \sum_{i=1}^n \log(\mu x_i) \quad \text{s.t.} \quad c(x) = 0$
2	

5. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \quad & x_1 \\ \text{s.t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, \end{aligned}$$

mit $x = [x_1 \ x_2]^\top$. Die Lagrange-Funktion des Problems ist $\mathcal{L}(x, \lambda) = x_1 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (a) Stellen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen (KKT-Bedingungen) für dieses Problem auf, so konkret wie möglich.

2	
---	--

- (b) Wir wollen dieses Problem mit dem Newton-Verfahren lösen. Wir sammeln alle Variablen in $z = [x_1 \ x_2 \ \lambda]^\top$ und iterieren, indem wir lineare Gleichungssysteme der Form

$$F(z^{[k]}) + J(z^{[k]})(z^{[k+1]} - z^{[k]}) = 0$$

nach $z^{[k+1]}$ lösen. Hierbei ist $F(z^{[k]}) \in \mathbb{R}^3$ und $J(z^{[k]}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Definieren Sie $F(z)$ und $J(z)$, um das Gleichungssystem für das gegebene Problem zu konkretisieren, und berechnen Sie den Wert von $F(z^{[k]})$ und $J(z^{[k]})$ für $z^{[k]} = [0 \ -\frac{1}{2} \ 1]$. Sie müssen das Gleichungssystem nicht lösen.

4	
---	--