Prüfung zur Systemtheorie und Regelungstechnik I, Universität Freiburg, SoSe 2022 (Prof. Dr. M. Diehl)

Mikroklausur 2 am 14.6.2022

Übungsgruppe:	1 ☐ Maher Brahim	2 ☐ Björn Lau	3 ☐ Philipp Ehnes

Name: Matrikelnummer: Punkte: / 9

Füllen Sie bitte Ihre Daten ein und machen Sie jeweils genau ein Kreuz bei der richtigen Antwort. Sie dürfen Extrapapier für Zwischenrechnungen nutzen, aber bitte geben Sie am Ende nur dieses Blatt ab. Richtige Antworten zählen 1 Punkt, falsche, keine oder mehrere Kreuze 0 Punkte.

1. Die Temperatur der Flamme eines Bunsenbrenners wird durch T beschrieben. Die Stärke der Flamme kann man durch das Drehen des Ventils regulieren, dabei ist der Drehwinkel $\theta > 0$ die Steuergröße. Die Temperatur der Flamme wird durch folgende Gleichung $\dot{T} = k_1\theta - k_2(T - T_0)^3$ angegeben, wobei k_1, k_2 und T_0 positive Konstanten sind. Wie groß ist die Temperatur T_{ss}, die sich bei einem konstanten Winkel θ_{ss} einstellt?

(a) ☐ $\frac{k_1\theta_{\text{ss}}}{k_2} + T_0$	(b) ☐ $\sqrt[3]{\frac{k_1\theta_{\text{ss}}+T_0}{k_2}}$	(c) ☐ $k_1\theta_{\text{ss}} + T_0 k_2$	(d) ☒ $\sqrt[3]{\frac{k_1\theta_{\text{ss}}}{k_2}} + T_0$

$$f(x_{\text{ss}}, u_{\text{ss}}) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow k_1\theta_{\text{ss}} - k_2(T_{\text{ss}} - T_0)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow T_{\text{ss}} = \sqrt[3]{\frac{k_1\theta_{\text{ss}}}{k_2}} + T_0$$

2. Welches der folgenden vier Systeme beschreibt NICHT das gleiche Eingangs- Ausgangsverhalten wie $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = \dot{u}$?

(a) ☐ $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$	(b) ☐ $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x$
(c) ☒ $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} x$	(d) ☐ $2\ddot{y} + 16\dot{y} = 4\dot{u} - 20y - 2\ddot{y}$

$$\dot{x}_1 = 5x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 + u, \quad y = 2x_2$$
$$\ddot{x}_2 = -\dot{x}_1 - 4\dot{x}_2 + \dot{u} = -5x_2 - 4\dot{x}_2 + \dot{u}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ddot{y} + 2\dot{y} + \frac{5}{2}y = \dot{u}$$

3. Welches der folgenden Systeme mit $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ ist in der Ruhelage $x_{\text{ss}} = u_{\text{ss}} = 0$ NICHT asymptotisch stabil nach Lyapunov?

(a) ☐ $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0\ 1], D = [0]$	(b) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1\ 0], D = [0]$
(c) ☐ $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0\ 1], D = [0]$	(d) ☒ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, C = [1\ 0], D = [0]$

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix}) \\
&= (\lambda - 1)(\lambda - 1) + 2 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda + 3 \overset{!}{=} 0 \\
\lambda_{1,2} &= -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - 3} \\
\lambda_{1,2} &= -\frac{-2}{2} \pm i\sqrt{2} \\
\lambda_1 &= 1 + i\sqrt{2} \\
\lambda_2 &= 1 - i\sqrt{2} \\
\Re(\lambda_{1,2}) > 0 &\Rightarrow \text{instabil}
\end{aligned}$$

4. Welche Impulsantwort hat das System $\dot{y} - 4ay - cu = 0$? a und c sind Konstanten.

(a) ☒ ce^{4at}	(b) ☐ $4ae^{ct}$	(c) ☐ $ce^{4at} + \delta t$	(d) ☐ $4ae^{ct} - \delta t$

$$\dot{y} = 4\,a\,y \;+\; c\,u$$
$$x = y \Rightarrow \dot{x} = 4\,a\,x \;+\; c\,u$$
$$\Rightarrow A = [4a], B = [c], C = [1], D = [0]$$
$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t) = ce^{4at}$$

5. Welche Impulsantwort $g(t)$ mit $t > 0$ hat das System $2\dot{y} = u$?

(a) [x] $\frac{1}{2}$	(b) [ ] $2t$	(c) [ ] $t^{\frac{1}{2}}$	(d) [ ] 0

$$g(t) = D\delta(t) + Ce^{At}B = 0 \cdot \delta(t) + 1 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

6. Ein LTI-System wird durch die E/A-Differentialgleichung $\dddot{y} + 5\ddot{y} + 2y = 3\dot{u} + u$ beschrieben. Wie lautet das charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$?

(a) [x] $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2$	(b) [ ] $5\lambda^2 + 5\lambda + 2$	(c) [ ] $2\lambda^3 + 10\lambda^2 + 4\lambda$	(d) [ ] $\lambda^2 + 3\lambda + 1$

$$\dddot{y} + 5\ddot{y} + 2y = 3\dot{u} + u$$
$$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 2$$

7. Welches charakteristische Polynom $p_A(\lambda)$ hat das LTI-System $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$ mit den Matrizen $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$ und $D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$?

(a) [ ] $\lambda^2 - 5\lambda - 83$	(b) [ ] $\lambda^2 - 3\lambda - 71$	(c) [x] $\lambda^2 - 5\lambda - 71$	(d) [ ] $\lambda^2 - 11\lambda + 83$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda - 2) - (-11 \cdot -7) = \lambda^2 - 3\lambda - 2\lambda + 6 - 77 = \lambda^2 - 5\lambda - 71$$

8. Bestimmen Sie die Polstellen des Systems, das durch folgende E/A-Differentialgleichung beschrieben wird: $4\ddot{y} - 16y = 4\ddot{u} - u$.

(a) [ ] $\{-1/2, 1/2\}$	(b) [ ] $\{0, 2\}$	(c) [ ] $\{-2, 0\}$	(d) [x] $\{-2, 2\}$

$$4\ddot{y} - 16y = 4\ddot{u} - u \Leftrightarrow \ddot{y} - 4y = \ddot{u} - \frac{1}{4}u$$
$$\Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4$$
$$p_A(\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

9. Ein Fahrzeug muss einen steilen Berg hinauffahren. Der Zustand des Systems ist gegeben durch die Position p und die Geschwindigkeit v. Der Eingang des Systems ist die Antriebskraft u. Es gilt $\dot{v} = 0.01\cos(2p) + 0.2u$. Linearisieren Sie das System um $p_{\text{ss}} = \frac{\pi}{4}$, $v_{\text{ss}} = 1$ und $u_{\text{ss}} = 0$. Bringen Sie das System in die Form $\dot{x} = Ax + Bu$. Geben Sie A und B an.

(a) [ ] $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.02 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$	(b) [ ] $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$
(c) [ ] $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.02 & 0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix}$	(d) [ ] $A = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} v \\ 0.01\cos(2p) + 0.2u \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 \cdot 2 \cdot \sin(2p_{\text{ss}}) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.02 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$