

## Übungsblatt 8: Laplacetransformation und Übertragungsfunktion (zu Kapitel 6)

Prof. Dr. Moritz Diehl, Dr. Jochem De Schutter

Die folgende Tabelle beinhaltet einige Funktionen und ihre Laplacetransformierten, hierbei gilt  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ .

$f(t)$	$\delta(t)$	$\sigma(t)$	$t$	$e^{-at}$	$\sin(\omega t)$	$\cos(\omega t)$	$\frac{dg(t)}{dt}$	$a \cdot g(t) + b \cdot h(t)$
$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s \cdot G(s)$	$a \cdot G(s) + b \cdot H(s)$

1. Beweisen Sie die oben angegebenen Laplacetransformationen der folgenden Funktionen indem Sie explizit eine vollständige Laplacetransformation durchführen. (1,5 P.)

(a)  $f(t) = \delta(t)$

(b)  $f(t) = e^{-at}$

(c)  $f(t) = \cos(\omega t)$

TIPP:  $\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$

2. Wie lauten die Zeitfunktionen  $f(t)$  von folgenden Laplacetransformierten? Verwenden Sie die oben angegebene Tabelle und die im Skript beschriebenen Eigenschaften der Laplacetransformation. Nehmen Sie an, dass die entstehenden Zeitfunktionen kausal sind, d.h. das  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  gilt. (1,5 P.)

(a)  $F(s) = \frac{4}{s}$

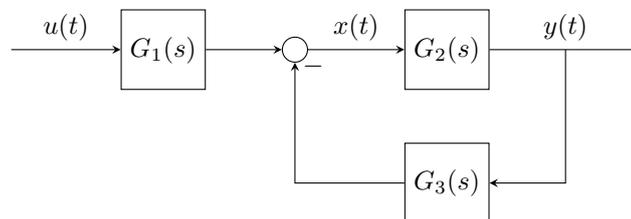
(b)  $F(s) = \frac{3}{s^2+9}$

(c)  $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$

*Hinweis: Substituieren Sie geschickt, sodass Sie eine einfache Rücktransformation aus der Tabelle ablesen können.*

3. Die Impulsantwort eines Systems sei  $g(t) = 2t + \sin(\omega t)$ , wobei  $\omega > 0$  ein bekannter Parameter ist. Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(s)$  des Systems. Wie lautet die Eingangs-Ausgangs-Differentialgleichung des Systems? (1 P.)

4. Betrachten Sie folgendes System (2 P.)



wobei  $G_1(s) = \frac{s+1}{s^2-2s+3}$ ,  $G_2(s) = \frac{2}{s^2+4}$  und  $G_3(s) = \frac{1}{s+2}$  gegeben sind.

(a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ .

(b) Wie hoch ist der Grad des Systems? Wie hoch der relative Grad?

5. Gegeben ist die E/A-Differentialgleichung  $2\ddot{y} + 10\dot{y} + 12y = 4\dot{u} + 2u$ . (2 P.)

(a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion.

(b) Berechnen Sie die Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion.

(c) Ist das System BIBO-stabil?

6. Betrachten Sie das System  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$  mit  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$  und  $D = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ . (2 P.)

(a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Systems.

Tipp:  $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ .

(b) Wie lautet die Eingangs-Ausgangs-Differentialgleichung des Systems?